Résistance d'un arbre - Torsion & Cisaillement

Définitions:

s = Coefficient de sécurité = [1 10]

Re (= σ_e) = Limite élastique / d'élasticité à la traction [MPa]

Rec = Limite élastique / d'élasticité à la compression [MPa]

Rpe = Résistance pratique élastique / à l'extension [MPa]
= Re / s

Reg = Résistance au glissement / au cisaillement [MPa]

$$= \frac{\frac{\mathbf{Rec}}{\mathbf{Re}}}{1 + \frac{\mathbf{Rec}}{\mathbf{Re}}} \mathbf{Re}$$ = [0.5 0.8] Re = [1/2 4/5] Re Selon les métaux

Rpg = Résistance pratique au glissement / au cisaillement [MPa]
= Reg / s
= [1/2 4/5] Rpe = [1/2s 4/5s] Re

Choix du coefficient de sécurité s sur la limite élastique Re (= σ_e):

Fanchon

<table>
<tr><th colspan="5">Valeurs indicatives</th></tr>
<tr><th>s</th><th>Charges exercées sur la structure</th><th>Contraintes dans la structure</th><th>Comportement du matériau</th><th>Observations</th></tr>
<tr><td>$1 < s < 2$</td><td>régulières et connues</td><td>connues</td><td>testé et connu</td><td>fonctionnement constant sans à-coups</td></tr>
<tr><td>$2 < s < 3$</td><td>régulières et assez bien connues</td><td>assez bien connues</td><td>testé et connu moyennement</td><td rowspan="3">fonctionnement usuel avec légers chocs et surcharges modérées</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$3 < s < 4$</td><td>moyennement connues</td><td>moyennement connues</td><td>non testé</td></tr>
<tr><td>mal connues ou incertaines</td><td>mal connues ou incertaines</td><td>connu</td></tr>
</table>

Résistance d’un arbre - Torsion & Cisaillement

Choix du coefficient de sécurité s sur la limite élastique Re (= σ_e):

Joseph P. Visodic

Coefficient de sécurité	Connaissance de la charge	Connaissance des tensions permises	Connaissance des propriétés du matériau	Connaissance de l'environnement
1.2-1.5	exacte	exacte	très bonne	complètement sous contrôle
1.5-2.0	bonne	bonne	très bonne	invariable
2.0-2.5	bonne	bonne	moyenne	normale
2.5-3.0	moyenne	moyenne	testée au hasard	normale
3.0-4.0	moyenne	moyenne	non testée	normale
3.0-4.0	indéfinie	indéfinie		indéfinie

Robert L. Norton

Coefficient de sûreté	SF1 - Propriétés matérielles (issues des tests)	SF2 - Conditions de charge (connaissance)	SF3 - Environnement de travail
1.3	Bien connues / caractéristiques	Obtenues des tests	Identique aux conditions de test du matériau
2	Bonne approximation	Bonne approximation	Vérifié, température ambiante
3	Approximation suffisante	Approximation suffisante	Légèrement exigent
5+	Approximation brute	Approximation brute	Extrêmement exigent

Coefficient de sécurité (matériaux ductiles) = max (SF1, SF2, SF3) ; basé sur la limite d'élasticité

Coefficient de sécurité (matériaux fragiles) = 2*[max (SF1, SF2, SF3)] ; basé sur la limite de résistance

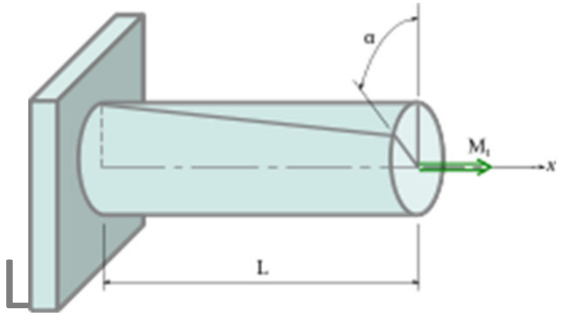
Dans nos projets de construction mécaniques avec de bonnes connaissances des paramètres:
s = 2

Attention exemples exigeants: ascenseurs s = 10
barrages s = 20

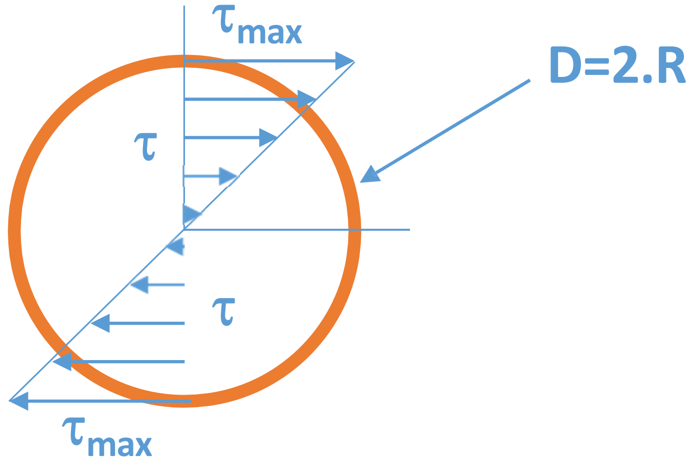
Résistance à la Torsion d'un Arbre

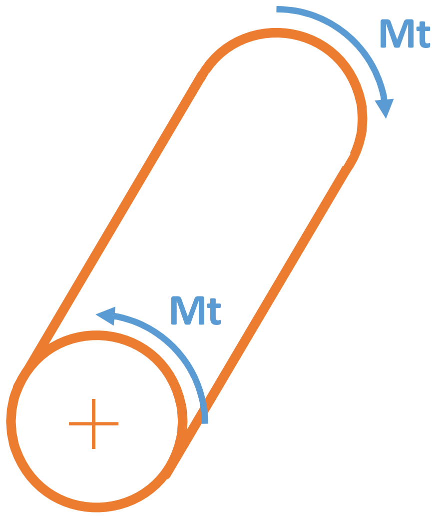
Contrainte tangentielle de Torsion (Mpa):

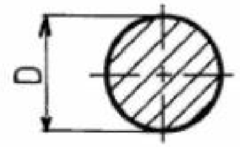
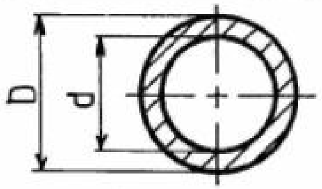
$$\tau = G\theta r = \frac{M_t}{I_0} r$$



- r=Distance au centre de l'arbre (mm)
- θ=Angle unitaire de torsion (rad/ mm) $= \alpha / L$
- G=Module d'élasticité transversal ou module de coulomb (en MPa)
- I_0=Moment quadratique polaire de la section (mm^4)
- Mt=Moment de torsion (N.mm)





Sections	Caractéristiques
	$I_o = \frac{\pi D^4}{32}$ $\frac{I_o}{R} = \frac{\pi D^3}{16}$
	$I_o = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$ $\frac{I_o}{R} = \frac{\pi D^3}{16} - \frac{\pi d^3}{16}$

Module d'élasticité transversal, de cisaillement, de glissement ou de Coulomb

$$G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$$

E = Module d'élasticité longitudinal

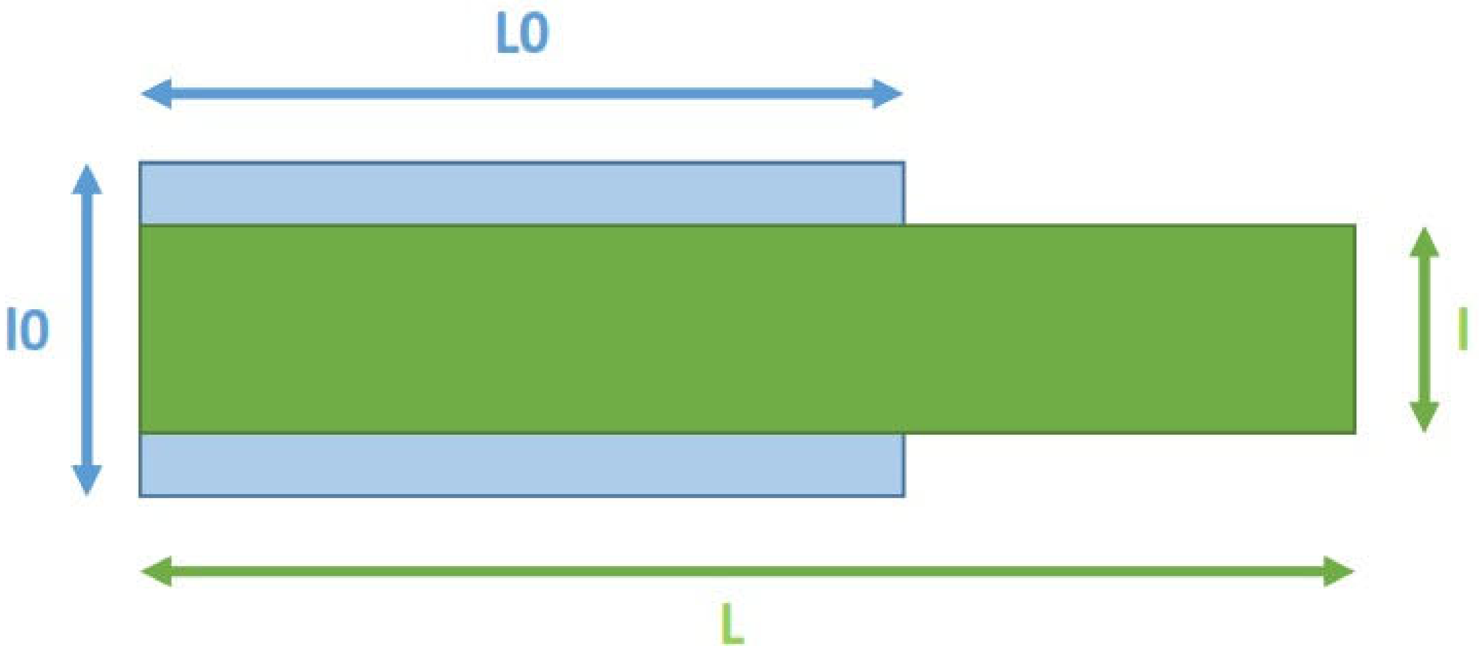
ou Module d'Young (MPa=N/mm^2)

G = Module d'élasticité transversal, de cisaillement, de glissement, de Coulomb (MPa=N/mm^2)

υ = Coefficient de Poisson (adimensionnel)

=0.3-0.31 pour acier inox

=0.35 pour aluminium



$$\upsilon = -\frac{(l-l_0)/l_0}{(L-L_0)/L_0} = -\frac{Contraction\ transversale}{Allongement\ axial}$$

Résistance à la Torsion d’un Arbre

Contrainte tangentielle maximale de Torsion (Mpa):

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_0} R$$

- R = Rayon de l’arbre (mm)
- I_0 = Moment quadratique polaire de la section (mm^4)

•Mt = Moment de torsion (N.mm)

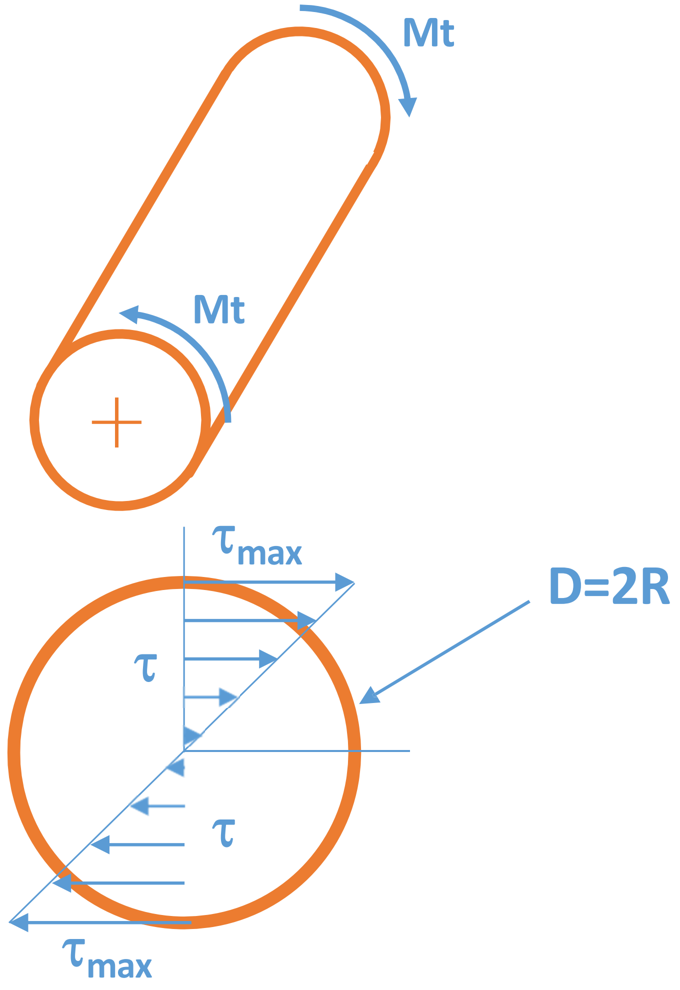
Condition de résistance a la torsion:

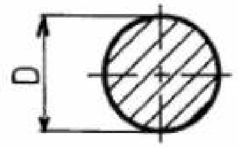
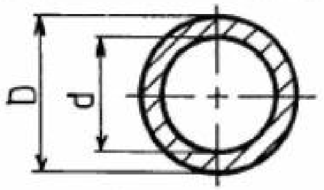
$$\tau_{max} < R_{pg}$$

- R_{pg}=Résistance pratique au cisaillement (MPa)

Résistance pratique au cisaillement (MPa):

$$\boxed{\mathbf{R_{pg}} = \frac{\mathbf{R_e}}{\mathbf{2s}} = \frac{\mathbf{R_e}}{\mathbf{4}}}$$ avec s = 2



Sections	Caractéristiques
	$I_o = \frac{\pi D^4}{32}$ $\frac{I_o}{R} = \frac{\pi D^3}{16}$
	$I_o = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$ $\frac{I_o}{R} = \frac{\pi D^3}{16} - \frac{\pi d^3}{16}$

Exemples de valeurs de R_e Limite élastique (MPa)

Matière	Nuance	Re (MPa)
Bois résineux courants	C18 à C30	18 à 30
Bois lamellé-collé	GL24 à GL32	24 à 32
Aluminium	Série 1000 à Série 7000	90 à 440
Acier de construction usuel non allié	S235 à S355	235 à 355
Acier au carbone trempé	XC 30 (C30)	350 à 400
Acier faiblement allié trempé	30 Cr Ni Mo 16 (30 CND 8)	700 à 1 450
ABS		45
PTFE		27
Delrin (acetal homopolymer)		76
Nylon 6/6 (extrudé)		79

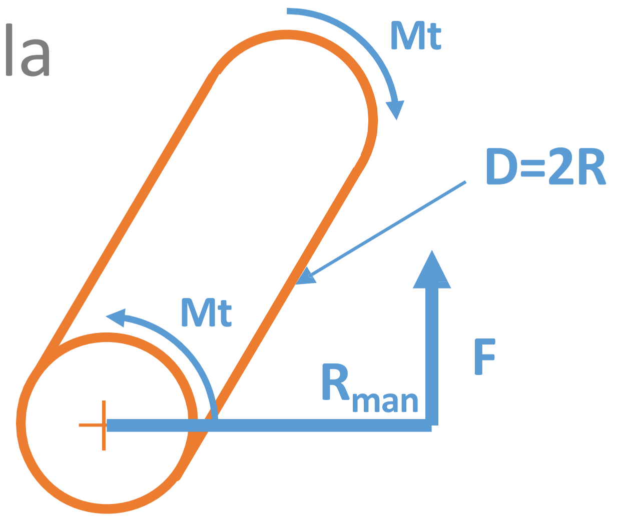
Résistance à la Torsion d'un Arbre

Exemple: Contrainte tangentielle maximale de Torsion (Mpa) Rayon de la manivelle: R_{man} = 10cm

Force appliquée a la manivelle: F = 1kg = 9.81N

Moment appliqué a l'arbre par la manivelle: $M_t = F.R$=0.981N.m

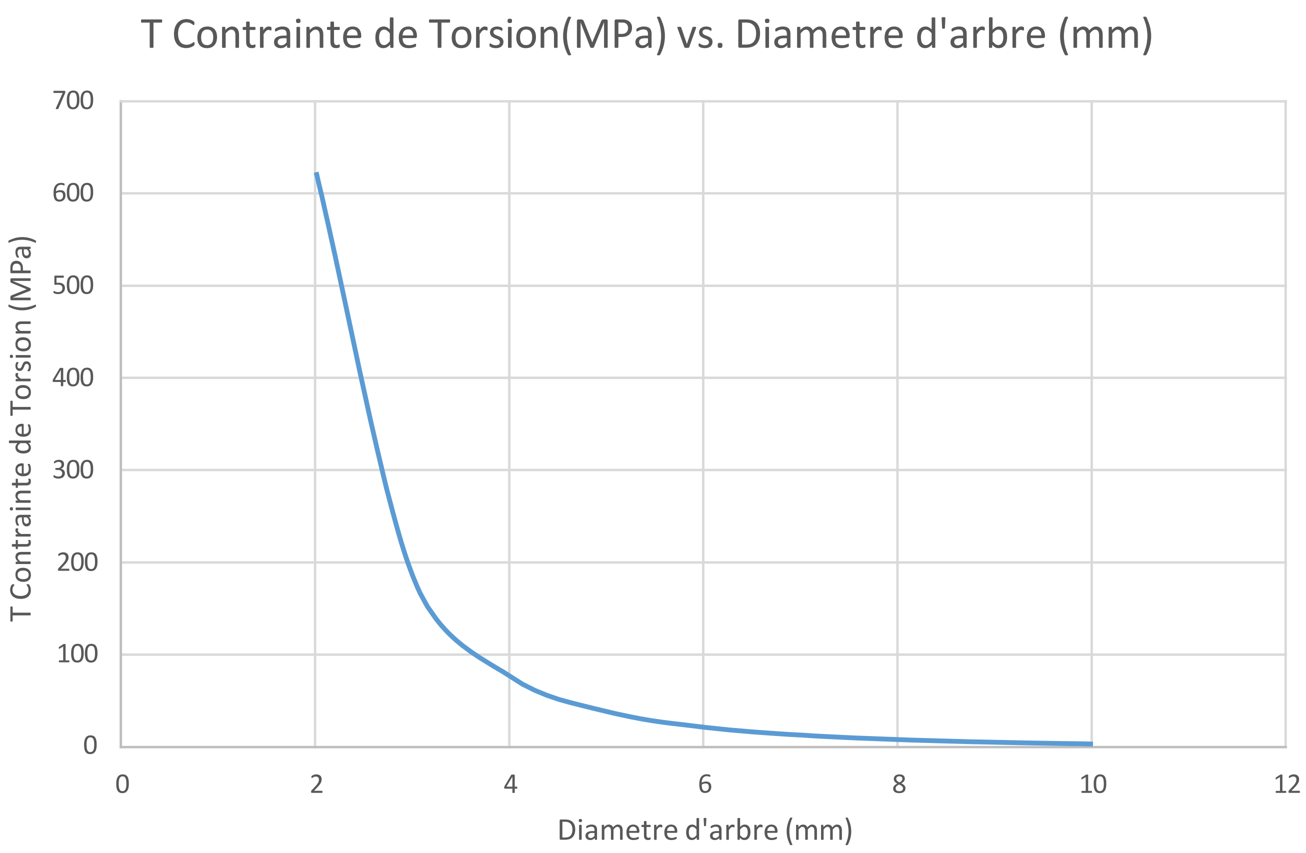
Rayon de l'arbre: R= de 2mm a 10mm



Choisir le matériau en comparant la contrainte de torsion au huitième de la limite élastique:

$$\boxed{\tau_{max} < R_{pg} = \frac{R_e}{2s} = \frac{R_e}{4}}$$

Avec s = 2



Résistance au Cisaillement d'un Arbre, Goupille, Clavette, …

$$\tau = \frac{F}{A} = G \times \theta$$

$$\theta = \frac{\Delta x}{l}$$

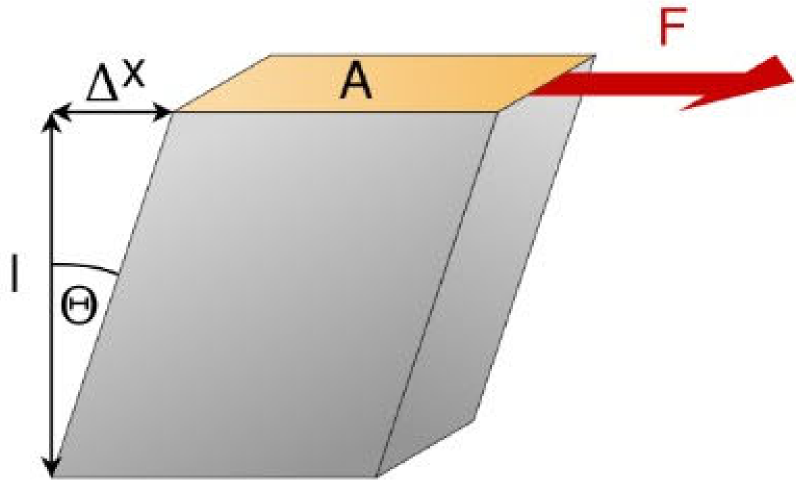
τ = Contrainte de cisaillement / Cission [Mpa]

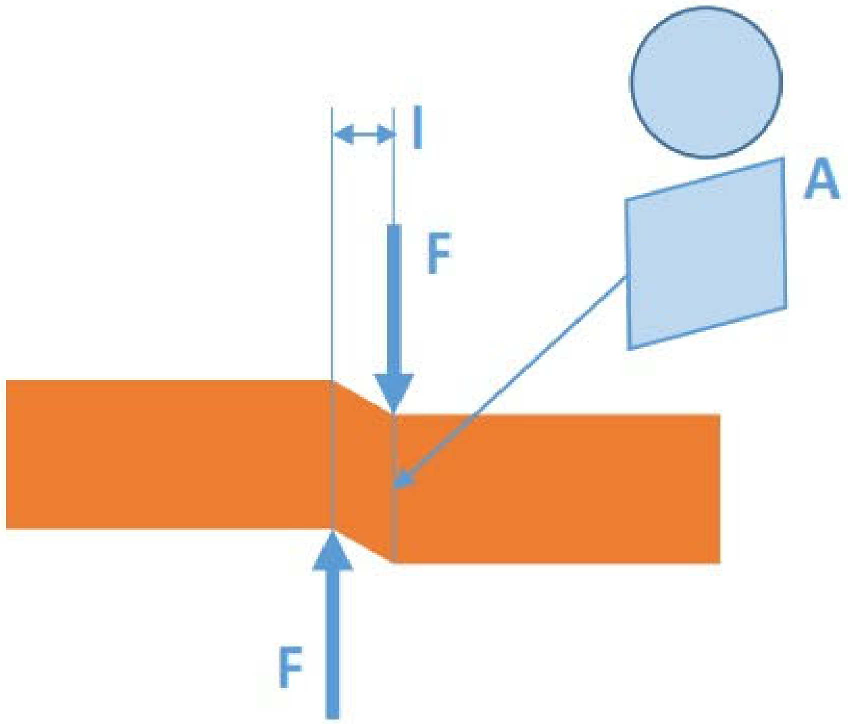
G = Module d'élasticité transversal ou de cisaillement ($MPa=N/mm^2$)

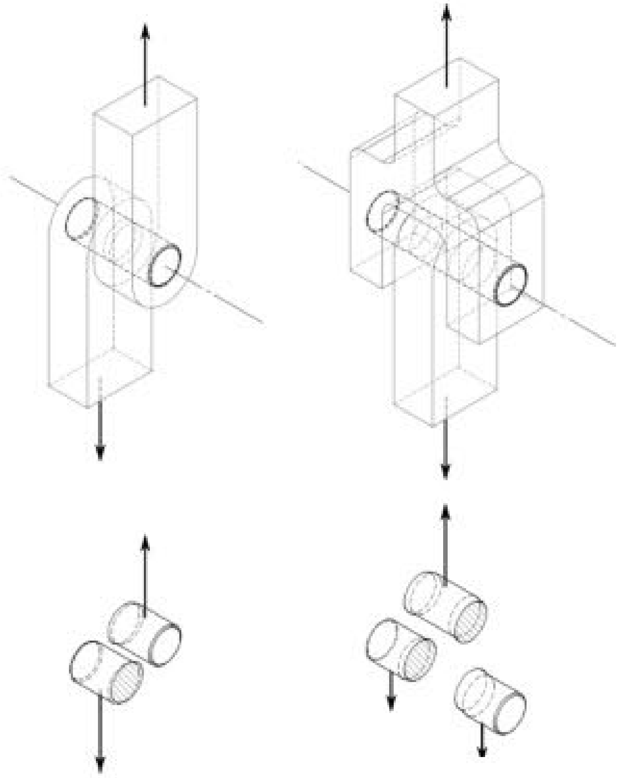
Θ = Variation de l'angle droit (rad)

F = Effort tranchant (N)

A = Section cisaillée (mm^2)







Résistance au Cisaillement d'un Arbre

- Contrainte de cisaillement (Mpa) :

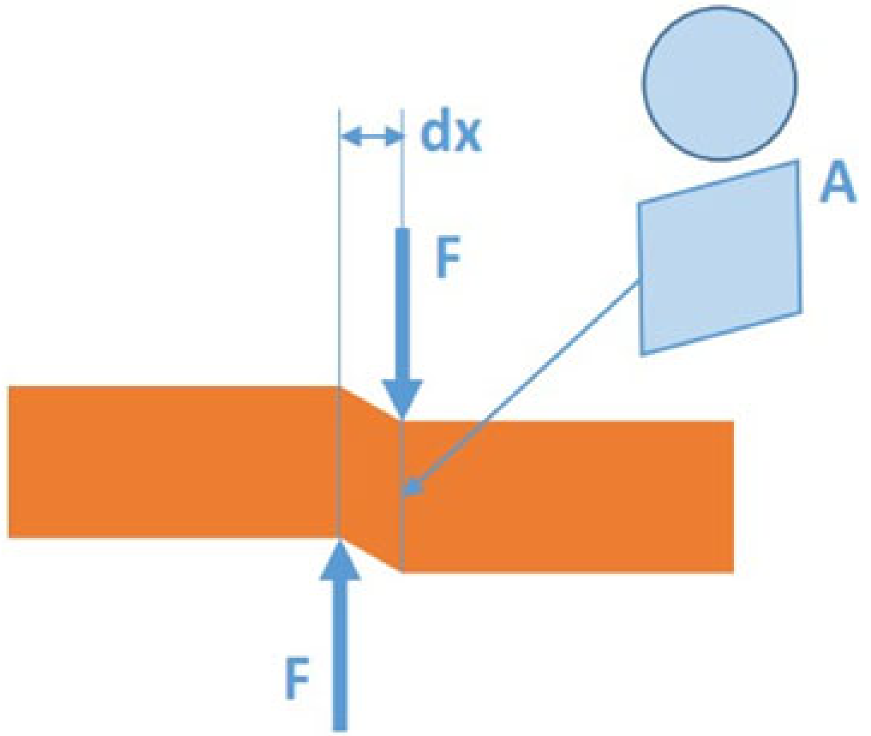
$$\tau = \frac{F}{A}$$

A = Section cisaillée (mm^2)

F = Effort tranchant (N)

- Condition de resistance au cisaillement:

$$\boxed{\tau_{max} < R_{pg} = \frac{R_e}{4}}$$



Rendements de Mécanismes

Energie d'entrée → **MACHINE** → Energie de sortie

Rendement:

$$\eta = \frac{Travail\ Sortie}{Travail\ Entree} = \frac{W_S}{W_E}$$

Rendement Instantané:

$$\eta = \frac{Puissance\ Sortie}{Puissance\ Entree} = \frac{P_S}{P_E}$$

Par mécanisme:	Rendement:
Hélice	60 a 85% (hélice bipale, hélice couverture totale)
Engrenage (une paire de roues dentées droites)	98%
Courroie crantée	98%
Courroie plate	98%
Courroie trapézoïdale	70 a 96%
Roulement à bille	99% (faibles charges dans le projet)
Palier lisse (coussinet)	À calculer

Frottements dans un Roulement a Billes – selon SKF

Estimating the frictional moment

Under certain conditions, the frictional moment can be estimated with sufficient accuracy using a constant coefficient of friction μ. The conditions are:

- bearing load $P \approx 0{,}1\ C$
- good lubrication
- normal operating conditions

The frictional moment under these conditions can be estimated using

$M = 0{,}5\ \mu\ P\ d$

For radial needle roller bearings, use F or F_w instead of d.

where

M	=	frictional moment [Nmm]
μ	=	constant coefficient of friction for the bearing (table 1)
P	=	equivalent dynamic bearing load [N]
d	=	bearing bore diameter [mm]
F	=	inner ring raceway diameter [mm]
F_w	=	diameter under the rollers [mm]

Constant coefficient of friction μ for open bearings

Bearing type	**Coefficient of friction μ**
Deep groove ball bearings	0,0015
Angular contact ball bearings	
– single row	0,0020
– double row	0,0024
– four-point contact	0,0024
Self-aligning ball bearings	0,0010
Cylindrical roller bearings	
– with a cage, when $F_a \approx 0$	0,0011
– full complement, when $F_a \approx 0$	0,0020
Needle roller bearings with a cage	0,0020
Tapered roller bearings	0,0018
Spherical roller bearings	0,0018
CARB toroidal roller bearings with a cage	0,0016
Thrust ball bearings	0,0013
Cylindrical roller thrust bearings	0,0050
Needle roller thrust bearings	0,0050
Spherical roller thrust bearings	0,0018

Frottements dans un Roulement a Billes – selon SKF

Exemple:

Moment de frottement résistant dans deux roulements à billes à contact radial

Dimensions de l'arbre supporté par les roulements:

R=2mm Longueur de l'arbre: L=200mm

Matière de l'arbre: Acier 304 masse volumique=8000kg/m^3 Ma=0.020kg

Masse totale avec une roue dentée de 100g placée au centre de l'arbre:
M=Ma+Mr=0.020+0.100=0.120kg
La charge est partagée par les 2 roulements (P/2) puis additionnée (2P/2) pour calculer le moment résistant

Moment de frottement:

Mf=0.5μPd=0.5 x 0.0015 x 0.120x9.81x0.004=3.5.10-6N.m=0.0035N.mm

Frottements dans un Roulement a Billes – selon SKF

Power loss and bearing temperature

The power loss in a bearing as a result of bearing friction can be estimated using

$$N_R = 1{,}05 \times 10^{-4}\, M\, n$$

where

N_R	=	power loss [W]
M	=	total frictional moment of the bearing [Nmm]
n	=	rotational speed [r/min]

The cooling factor W_s is defined as the heat being removed from the bearing per degree of temperature difference between the bearing and ambient. If the value of W_s is known, a rough estimate of the temperature increase in the bearing can be obtained using

$$\Delta T = N_R / W_s$$

where

ΔT	=	temperature increase [°C]
N_R	=	power loss [W]
W_s	=	cooling factor [W/°C]

Frottements dans un Roulement a Billes – selon SKF

Exemple: Puissance dissipée dans un roulement:

Vitesse de rotation=2tr/s=120tr/min=12.57rad/s

$Nr=1.05x10^{-4}.Mf.n=1.05x10^{-4}x0.0035x120=4.4x10^{-5}W$

Puissance disponible sur l'arbre avec moment de 0.981N.m:

$P = M_t.\omega$ =0.981N.mx12.57rad/s=12.3W

Rendement Roulement:

η= 1-Nr/P=99.9%